I Capacité numérique

- Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2
  - Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1
  - Utiliser la fonction odeint de la bibliothèque scipy.integrate (sa spécification étant fournie).
  - à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.

II Modules

Conformément au programme, on utilise la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` (documentation) pour réaliser l'intégration **numérique** d'une équation différentielle d'ordre 2.

Notons qu'on pourra lui préférer la fonction `solve_ivp` du même module offrant davantage de possibilités (documentation), en particulier celle de déterminer les instants où certains évènements sont réalisés.

```
%matplotlib inline
```

La ligne précédente ne doit apparaître que dans les notebooks `Jupyter`, pas dans un fichier python.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.ma as ma
```

III Équation différentielle d'ordre 2

III.1 Système d'équation différentielles d'ordre 1 adimensionnement

Pour une force newtonienne, les équations différentielles adimensionnées en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\rho' = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} \qquad \theta' = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho'}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{4\pi^2}{\rho} + \rho\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} = -2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu travailler en coordonnées cartésiennes en écrivant la force sous la forme :

$$-\frac{\mathcal{G}m_T m}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\left(x\vec{e}_{x+}y\vec{e}_y\right)$$

car $\vec{e}_r = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)/\sqrt{x^2+y^2}/$ et $r^2 = x^2 + y^2$

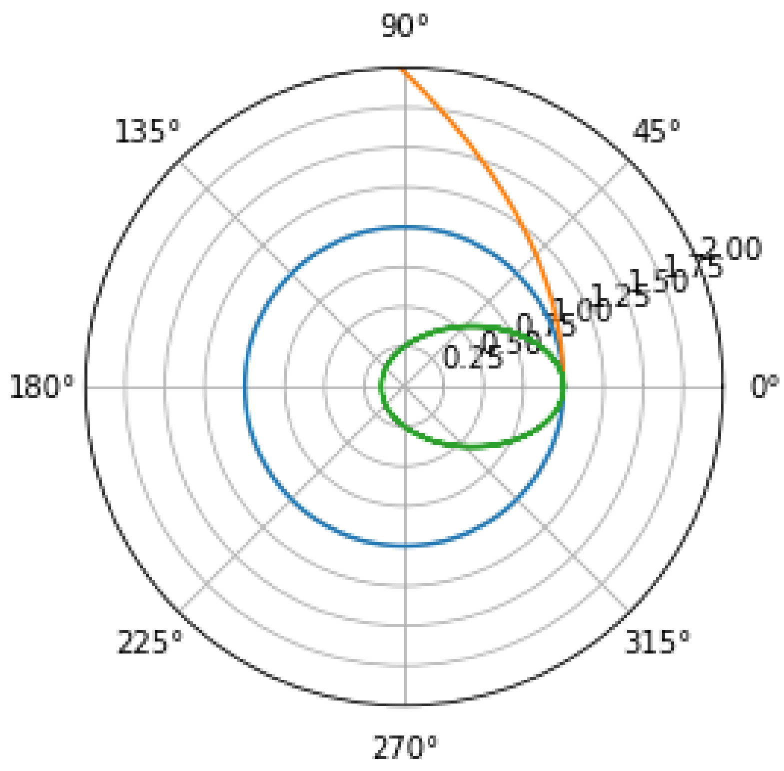
III.2 Question 4b : sans frottement

On cherche à intégrer numériquement le système différentiel :

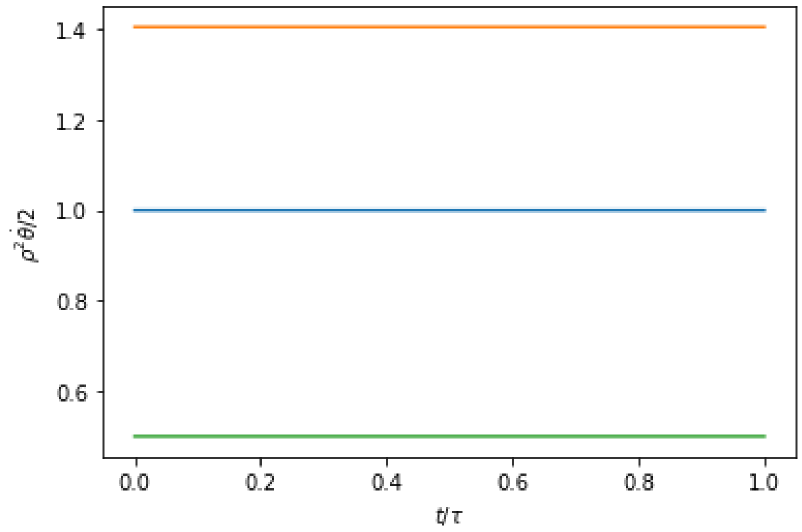
- entre les instants $t_{\min}$ et $t_{\max}$
- vérifiant les conditions initiales

```
def systdiff4b(X,tau):
    r,rprime,theta,thetaprime = X
    return [rprime,-4*np.pi**2/r**2 + r*(thetaprime)**2 ,thetaprime,-2*rprime*thetaprime/r]
Rayon = 6800 #km
Periode = 8458 #s
masse = 140e3 #kg
gamma = 5.0e-5 # kg/m

tau_min = 0
tau_max = 1 #Periode
NombrePoints = 2000
tau = np.linspace(tau_min,tau_max,NombrePoints)

rho0 = 1 #en unités de Rs
omega0 = 2*np.pi
CIs = [[rho0,0,0,omega0],[rho0,0,0,np.sqrt(2)**omega0],[rho0,0,0,omega0/2]]
NombreCI = len(CIs)

sols = [odeint(systdiff4b,CIs[i],tau) for i in range(NombreCI)]

rhos = np.array([sols[i][:,0] for i in range(NombreCI)])
thetas = np.array([sols[i][:,2] for i in range(NombreCI)])
omegas = np.array([sols[i][:,3] for i in range(NombreCI)])
```

```
figtrajectoire, axtrajectoire = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "polar"})
[axtrajectoire.plot(thetas[i],rhos[i]) for i in range(NombreCI)]
axtrajectoire.set_ylim(0,2)
figtrajectoire.show()
```



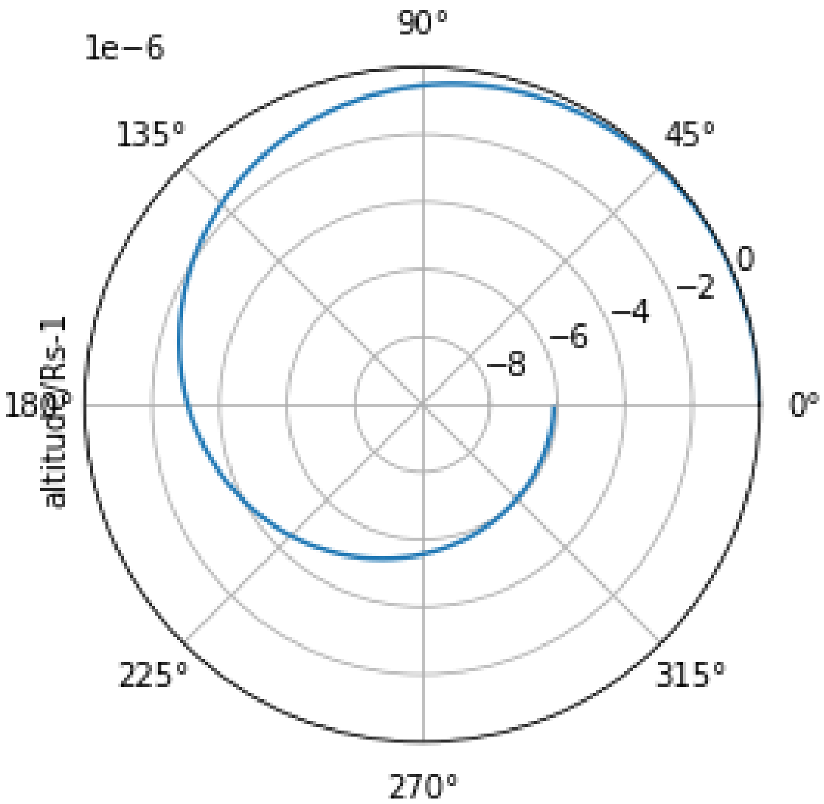

```
aires = rhos**2*omegas/(2*np.pi)
figaires,axaires = plt.subplots()
[axaires.plot(tau,aires[i]) for i in range(NombreCI)]
axaires.set_xlabel(r'$t/\tau$')
axaires.set_ylabel(r'$\rho^2\dot{\theta}/2$')
figaires.show()
```



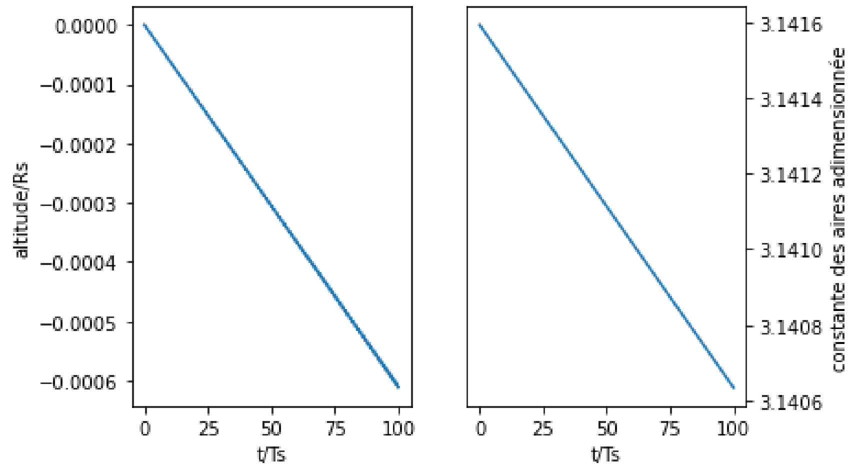
III.3 Question 4c : avec frottement

```
def systdiff4c(u,tau,beta):
    r,rprime,theta,thetaprime = u
    v = np.sqrt(rprime**2 + (r*thetaprime)**2) #norme adimensionnée de la vitesse
    # d theta/d t = thetaprime
    # d thetaprime / dt = - sin(theta)
    return [rprime,-4*np.pi**2/r**2 + r*(thetaprime)**2 -
    ↪ beta*v*rprime,thetaprime,-2*rprime/r*thetaprime-beta*v*r*thetaprime]

Rayon = 6800 #km
Periode = 8458 #s
masse = 140e3 #kg
gamma = 1.0e-8 # kg/m
beta = gamma*Rayon*1e3/masse

tau4c_min = 0
tau4c_max = 100 #Periode
NombrePoints4c = 20000
tau4c = np.linspace(tau4c_min,tau4c_max,NombrePoints4c)

CI4c = [rho0,0,0,omega0]

sol4c = odeint(systdiff4c,CI4c,tau4c, args = (beta,))
rho4c,theta4c = np.array(sol4c[:,0]),np.array(sol4c[:,2])
```

```
mask4c=ma.masked_greater(tau4c,1).mask #pour ne conserver que l'intervalle tau = 0:1,
    ↪ soit t = 0:T0

tau4cMasked = tau4c[~mask4c]
rho4cMasked = rho4c[~mask4c]
theta4cMasked = theta4c[~mask4c]

figtrajectoire4c,axtrajectoire4c = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "polar"})
axtrajectoire4c.plot(theta4cMasked,rho4cMasked-1)
axtrajectoire4c.set_ylim(-1e-5,0)
axtrajectoire4c.set_ylabel('altitude/Rs-1')
figtrajectoire4c.show()
```




```
figaltitude4c,(axaltitude4c,axaires4c) = plt.subplots(1,2)
axaltitude4c.plot(tau4c,rho4c-1)
axaltitude4c.set_ylabel('altitude/Rs')
axaltitude4c.set_xlabel('t/Ts')

omega4c = np.array(sol4c[:,3])
aires4c = .5* rho4c**2 * omega4c
axaires4c.plot(tau4c,aires4c)
axaires4c.set_ylabel('constante des aires adimensionnée')
axaires4c.yaxis.set_label_position("right")
axaires4c.yaxis.set_ticks_position("right")
axaires4c.set_xlabel('t/Ts')
figaltitude4c.show()
```



III.4 Question 4d

```
gamma4d = 1.0e-8*5e4 # kg/m
beta4d = (Rayon*1e3/masse)*np.array([gamma4d, gamma4d])

tau4d_min = 0
tau4d_max = 2

#Periode
NombrePoints4d = 2000

tau4d = np.linspace(tau4d_min,tau4d_max,NombrePoints4d)

CI4d = [[rho0,0,0,omega0/2],[rho0,0,0,omega0]]

sols4d = [odeint(systdiff4c,CI4d[i],tau4d, args = (beta4d[i],)) for i in range(2)]
```

```python

fig4d,(ax4dI,ax4dII) = plt.subplots(1,2,subplot_kw={"projection": "polar"})
rhos4d = np.array([sols4d[i][:,0] for i in range(2)])
omegas4d = np.array([sols4d[i][:,2] for i in range(2)])
ax4dI.plot(omegas4d[0],rhos4d[0])
ax4dII.plot(omegas4d[1],rhos4d[1])
fig4d.show()
```